

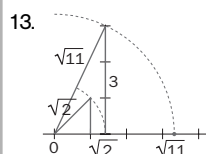
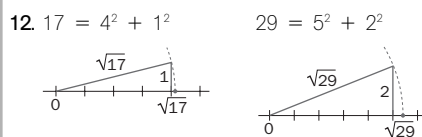
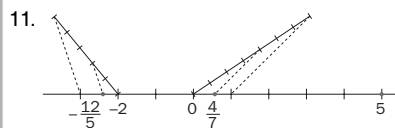
SOLUCIONES

UNIDAD 1

- I. a) 18
b) $-\frac{11}{8}$
- II. a) $-\frac{3^7}{11} = -\frac{2187}{11}$
b) 3
1. a) $\frac{4}{3}$
b) $\frac{12}{7}$
2. a) $\frac{101}{4}$ b) $\frac{2500}{99}$ c) $\frac{2273}{90}$
3. $\frac{150001}{1980}$
4. a) 9 b) 8
5. b
6. a) Falso. Por ejemplo, $\sqrt{5} + (-\sqrt{5}) = 0$ no es irracional.
b) Falso. Por ejemplo, $\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 3$ no es irracional.
7. 2286,65 €
8. a) $\frac{27}{10} < \frac{68}{25} < \frac{11}{4} < \frac{14}{5}$
b) $1,23 < 1,2\overline{3} < 1,2\widehat{3}$
c) $\sqrt[4]{4} = \sqrt{2} < \sqrt[3]{3}$
d) $2,9 < 3 < 3,01$

9. $a \leq b \Rightarrow a \cdot \frac{1}{a} \geq b \cdot \frac{1}{a} \Rightarrow 1 \geq \frac{b}{a} \Rightarrow 1 \cdot \frac{1}{b} \leq \frac{b}{a} \cdot \frac{1}{b} \Rightarrow \frac{1}{b} \leq \frac{1}{a}$

10*. $(x - y)^2 = x^2 + y^2 - 2xy \geq 0 \Rightarrow x^2 + y^2 \geq 2xy \Rightarrow \frac{x^2 + y^2}{xy} = \frac{x^2}{xy} + \frac{y^2}{xy} = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$



14. $2x - 3 + |2x - 3| = \begin{cases} 4x - 6 & \text{si } x \geq \frac{3}{2} \\ 0 & \text{si } x < \frac{3}{2} \end{cases}$

Para $x = -1$, el valor de la expresión es 0.
Para $x = 0$, el valor de la expresión es 0.
Para $x = 2$, el valor de la expresión es 2.

15. a) $|x + 2| + |x + 3| = \begin{cases} -2x - 5 & \text{si } x \leq -3 \\ 1 & \text{si } -3 < x < -2 \\ 2x + 5 & \text{si } x \geq -2 \end{cases}$
b) $x + |x + 2| + |x + 3| = \begin{cases} -x - 5 & \text{si } x \leq -3 \\ x + 1 & \text{si } -3 < x < -2 \\ 3x + 5 & \text{si } x \geq -2 \end{cases}$

16. a) $C = [-3, +\infty)$
b) $A = (2, 4)$
c) $C = [-3, +\infty)$
17. a) (0, 4)
b) $(-\infty, -4] \cup [-2, +\infty)$
c) $[-3, 1]$

18. $E = \frac{1}{70}$ $Er = \frac{1}{120}$

19.

	Unid.	Centés.	Diezmilés.
Defecto	1	1,41	1,4142
Exceso	2	1,42	1,4143
Redondeo	1	1,41	1,4142

20. a) $5,39 \cdot 10^{-4}$ e) $1,16 \cdot 10^{-2}$
b) $-6,85 \cdot 10^8$ f) $1,728 \cdot 10^3$
c) $1,375 \cdot 10^{11}$ g) $1,42 \cdot 10^{-11}$
d) $5 \cdot 10^{-1}$
21. a) $1,205 \cdot 10^{28}$ átomos
b) 0,419 kg
c) $1,34 \cdot 10^{23}$ moléculas
22. a) 463 veces
b) $d_{\text{hierro}} = 5,5 \text{ g/cm}^3$ $d_{\text{plutón}} = 1,97 \text{ g/cm}^3$
23. a) $\frac{3}{2}\sqrt{6}$ b) $\frac{13}{4}\sqrt{2}$ c) $32\sqrt[3]{2}$ d) $\frac{\sqrt[8]{2 \cdot 5^7}}{5}$
24. a) $1466\sqrt{2}$ b) $\sqrt[8]{2^7}$
25. a) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ b) $\frac{\sqrt[4]{5^3}}{2}$ c) $\frac{10\sqrt{5} - 5}{19}$

26. 1044
27. a) $5643 - 3258\sqrt{3}$
b) $16x^4 + \frac{128}{3}x^2 + \frac{128}{3} + \frac{512}{27x^2} + \frac{256}{81x^4}$
28. a) $T_6 = 2064384\sqrt{2}$ b) $T_6 = 48384a^{11}b^5$
29. $T_9 = 495 \cdot 3^4 \cdot 5^8$
30. $4, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}$
31. a) 1,893
b) -0,9605
32. $\log A = x^2 \log x$
33. $A = \frac{100x^2}{y}$
34. a) 2,771 b) -0,540 c) 5,360
35. a) 543058
b) 3,17 días
c) El resultado es independiente del número inicial de bacterias.
d) 5,47 días
36. 13,14 g
37. a) 5356 € c) 5362,50 €
b) 5362 € d) No hay gran diferencia.

UNIDAD 2

- I. $x = 1$, no; $x = -1$, sí; $x = 2$, sí; $x = -2$, no; $x = 5$, sí
- II. a) $(x = 3, y = -1)$ b) $(x = 9, y = -6)$
1. a) $6x^4 + 7x^3 - 17x^2 - 11x + 15$
b) $-6x^3 + 7x^2 + 5x - 6$
c) $8x^3 + 2x^2 - 34x + 12$
2. a) Coc.: $x + \frac{2}{3}$; resto: $x - \frac{19}{3}$
b) Coc.: $3x^3 - 6x^2 + 10x - 21$; resto: 46
c) Coc.: $\frac{1}{2}x^2 - \frac{9}{4}x + \frac{23}{8}$; resto: $-\frac{21}{8}$

3. $m = \frac{32}{3}$
4. a) $k = -8$ b) $k = -6$
5. a) $(x - 1)(x + 2)(x + \frac{3}{2})$
b) $(3x + 2)^2$
c) $(x - 2)(x + 2)(x^2 + 4)$
d) $(x - 1)(x + 1)(2x + 3)$
e) $(x + 1)(2x + 1)(3x + 1)$
f) No tiene raíces enteras.
g) $(x - 2)(x - 1)(x^2 + 1)$
h) $x^4(x - 3)(x + 3)$
6. a) m.c.d. = $x - 1$
m.c.m. = $x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 4$
b) m.c.d. = $Q(x)$
m.c.m. = $P(x)$
c) m.c.d. = $P(x)$
m.c.m. = $R(x)$
d) m.c.d. = $6x^2 - 5x + 1$
m.c.m. = $24x^4 - 20x^3 - 2x^2 + 5x - 1$
e) m.c.d. = $x - 2$
m.c.m. = $2x^4 - 8x^3 - 8x^2 + 32x$
7. a) $x - 1$ b) $\frac{x + 3}{x - 2}$
8. a) $\frac{ab + a - ab^2}{b^2}$ d) $\frac{1}{x + a}$
b) $\frac{10x + 12}{x^2 - 4}$ e) $\frac{3x + 2}{2x + 1}$
c) $x^2y - xy^2$
9. a) $x = \frac{9}{32}$
b) $x = 0, x = -5$
c) $x = \sqrt{\frac{5}{6}}, x = -\sqrt{\frac{5}{6}}$
d) $x = \frac{11}{4}, x = -2$
e) $x = -2, x = \frac{1}{3}, x = 1, x = -\frac{3}{2}$
f) $x = 2, x = -\frac{3}{2}$
10. $x^3 + 2x^2 - 3x - 10$. Aunq no todas las soluciones son reales.
11. a) $x = -4, x = 1, x = -1, x = 4$
b) $x = -1, x = 1, x = \pm\sqrt{-7}$ no son reales.
c) $x = -3, x = 0, x = 5$
d) $x = -2, x = 2, x = \pm\sqrt{-2}$ no son reales.
12. a) $x = -2, x = -1$ c) $x = -\frac{4}{3}, x = 2$
b) $x = \frac{32}{7}, x = 8$
13. a) $x = 2$ y dos soluciones más no reales
b) $x = -1 + \sqrt{2}, x = -1 - \sqrt{2}$
c) $x = 0$
14. a) $x = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}, x = 4$
b) $x = 5$
c) No tiene solución.
15. $x = 0, x = 1, x = 3$
16. $x = 15$
17. a) $x = \frac{1}{2}$
b) $x = \frac{75}{34}$
c) $x = 3$
d) No tiene solución.
18. $x = 5$
19. $x = 6$

SOLUCIONES

20. a) $x = 0, x = \frac{1}{2}$ c) $x = -1$
 b) $x = 1$ d) $x = 3, x = -\frac{3}{2}$
21. a) $x = 1$ c) $x = 1, x = -1$ e) $x = 1, x = 2$
 b) $x = 2$ d) $x = 2$ f) $x = -2$
22. a) $(x = -2, y = 3, z = 1)$
 b) $(x = \frac{25}{36}, y = \frac{1}{36}, z = \frac{3}{2})$
 c) $(x = 4, y = 1, z = -2)$
 d) $(x = 2, y = -3, z = 0)$
23. a) Infinitas soluciones:
 $(x = \frac{3t+4}{5}, y = \frac{7t-4}{5}, z = t)$
 b) No tiene solución.
 c) Infinitas soluciones: $(x = -\frac{7t}{5}, y = t, z = \frac{4t}{5})$
 d) $(x = -\frac{13}{22}, y = -\frac{25}{22}, z = -\frac{28}{22})$
24. a) $(x = 5, y = -2); (x = \frac{17}{6}, y = \frac{7}{3})$
 b) $(x = 1, y = -2); (x = -\frac{25}{2}, y = \frac{17}{5})$
 c) No hay solución.
 d) $(x = 2, y = 1)$
25. a) $(x = 4, y = 0); (x = -4, y = 0)$
 b) $(x = -3\sqrt{2}, y = \frac{\sqrt{2}}{2});$
 $(x = 3\sqrt{2}, y = -\frac{\sqrt{2}}{2}); (x = -1, y = 3)$
 $(x = 1, y = -3)$

26. a) No hay soluciones reales b) $(x = 2, y = 1)$
27. a) $(x = \sqrt{10}, y = \sqrt{10})$ b) $(x = 20, y = 2)$
28. a) Sí b) No c) Sí
29. a) $[-10, +\infty)$ b) No tiene solución. c) $(-\infty, 2)$
30. a) $(0, \frac{3}{2})$
 b) $(-\infty, -3] \cup [\frac{8}{3}, +\infty)$
 c) $(-2, 0) \cup (2, +\infty)$
 d) $(-\infty, 1]$
 e) $(-\infty, \frac{1}{7}] \cup [1, +\infty)$
 f) $\{-1\} \cup [0, +\infty)$
 g) $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$
 h) $(-2, -1)$
31. a) $(-\infty, -\frac{1}{2}) \cup [\frac{2}{5}, +\infty)$
 b) $(-\infty, -2) \cup [-1, 1) \cup [2, +\infty)$
 c) $(-\infty, -1)$
 d) $(-3, 0] \cup (3, +\infty)$
 e) $[-5, -1) \cup (0, +\infty) - \{1\}$
 f) $(-\infty, -\frac{3}{2}] \cup (-1, +\infty)$

UNIDAD 3

- I. $x = 20$ cm
 II. $30^\circ, 90^\circ, \sqrt{3}$
1. a) $\frac{\pi}{6}$ rad b) $\frac{\pi}{3}$ rad c) $\frac{11\pi}{6}$ rad d) $\frac{10\pi}{9}$ rad
2. $1 \text{ rad} \approx 57^\circ 17' 45''$
3. a) 420° b) 270° c) $229^\circ 11'$ d) 720°
4. a) $\sin \hat{B} = \frac{5\sqrt{61}}{61}$ $\cos \hat{B} = \frac{6\sqrt{61}}{61}$ $\text{tg} \hat{B} = \frac{5}{6}$
 $\sin \hat{C} = \frac{6\sqrt{61}}{61}$ $\cos \hat{C} = \frac{5\sqrt{61}}{61}$ $\text{tg} \hat{C} = \frac{6}{5}$
 b) $\sin \hat{A} = \frac{3}{5}$ $\cos \hat{A} = \frac{4}{5}$ $\text{tg} \hat{A} = \frac{3}{4}$
 $\sin \hat{C} = \frac{4}{5}$ $\cos \hat{C} = \frac{3}{5}$ $\text{tg} \hat{C} = \frac{4}{3}$
5. $\text{cosec} \alpha = \sqrt{5}$, $\sec \alpha = \frac{\sqrt{5}}{2}$, $\text{cotg} \alpha = 2$

6. $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$, $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\text{tg} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$
 $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$, $\text{tg} 60^\circ = \sqrt{3}$

7.

	sen α	cos α	tg α	cosec α	sec α	cotg α
a) 120°	+	-	-	+	-	-
b) -70°	-	+	-	-	+	-
c) 256°	-	-	+	-	-	+
d) 800°	+	+	+	+	+	+
e) 315°	-	+	-	-	+	-
f) 1200°	+	-	-	+	-	-
g) 55°	+	+	+	+	+	+
h) -460°	-	-	+	-	-	+

8.

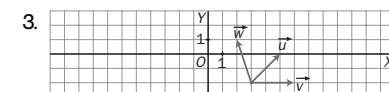
	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{3}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{9\pi}{4}$
sen α	+	-	-	+	-
cos α	-	+	-	-	+
tg α	-	-	+	-	-
cosec α	+	-	-	+	-
sec α	-	+	-	-	+
cotg α	-	-	+	-	-

9. a) $\sin 150^\circ = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$
 b) $\cos 225^\circ = -\cos 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
 c) $\text{tg} 330^\circ = -\text{tg} 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}$
 d) $\text{cosec} 135^\circ = \frac{1}{\sin 45^\circ} = \sqrt{2}$
 e) $\sec 240^\circ = -\sec 60^\circ = -2$
 f) $\text{cotg} 300^\circ = -\text{cotg} 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}$
10. a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ b) -2 c) $\sqrt{3}$ d) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$
11. $\text{tg} \alpha = \sqrt{3}$, $\sec \alpha = 2$, $\cos \alpha = \frac{1}{2}$,
 $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\text{cosec} \alpha = \frac{2\sqrt{3}}{3}$
12. $\cos \alpha = -\frac{1}{5}$, $\text{tg} \alpha = -\sqrt{24}$, $\sin \alpha = \frac{\sqrt{24}}{5}$,
 $\text{cotg} \alpha = -\frac{\sqrt{24}}{24}$, $\text{cosec} \alpha = \frac{5\sqrt{24}}{24}$
13. $\text{tg} \alpha = \frac{1}{2}$, $\sec \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{2}$, $\cos \alpha = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$,
 $\sin \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{5}$, $\text{cosec} \alpha = -\sqrt{5}$
14. a) $\sin \alpha = \frac{3\sqrt{10}}{10}$ b) $\text{tg} \alpha = -\frac{3}{4}$
15. $\sin 75^\circ = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$, $\sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$
 $\cos 75^\circ = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$, $\cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$
 $\text{tg} 75^\circ = 2 + \sqrt{3}$, $\text{tg} \frac{\pi}{12} = 2 - \sqrt{3}$
16. $\sin(\alpha + \frac{3\pi}{2}) =$
 $= \sin \alpha \cdot \cos \frac{3\pi}{2} + \cos \alpha \cdot \sin \frac{3\pi}{2} =$
 $= \cos \alpha \cdot (-1) = -\cos \alpha$
17. $\cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha$
 $\text{tg} 3\alpha = \frac{3 \text{tg} \alpha - \text{tg}^3 \alpha}{1 - 3 \text{tg}^2 \alpha}$

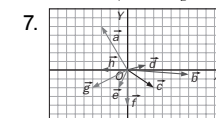
18. $\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{3\sqrt{10}}{10}$, $\cos \frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{10}}{10}$, $\text{tg} \frac{\alpha}{2} = 3$
19. a) $2 \sin 35^\circ \cos 20^\circ$ c) $2 \cos 105^\circ \cos 20^\circ$
 b) $2 \cos 55^\circ \sin 20^\circ$ d) $-2 \sin 120^\circ \sin 100^\circ$
20. a) $-\frac{1}{2}(\cos 120^\circ - \cos 40^\circ)$
 b) $\frac{1}{2}(\cos 35^\circ + \cos 15^\circ)$
21. $\cos 75^\circ + \cos 45^\circ = 2 \cos 60^\circ \cos 15^\circ =$
 $= 2 \cdot \frac{1}{2} \cos 15^\circ = \cos 15^\circ$
22. $\frac{\cos 2x + \cos x}{\sin 2x + \sin x} = \text{cotg} \frac{3x}{2}$
23. a) $x = 90^\circ + 360^\circ k$, $k \in \mathbb{Z}$ ó $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$
 b) $x = 180^\circ k$, $k \in \mathbb{Z}$ ó $x = \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$
 c) $\begin{cases} x = 120^\circ + 360^\circ k \\ x = 240^\circ + 360^\circ k \end{cases}$ $k \in \mathbb{Z}$ ó
 $\begin{cases} x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k \\ x = \frac{4\pi}{3} + 2\pi k \end{cases}$ $k \in \mathbb{Z}$
 d) $\begin{cases} x = 30^\circ + 360^\circ k \\ x = 210^\circ + 360^\circ k \end{cases}$ $k \in \mathbb{Z}$ ó
 $\begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k \\ x = \frac{7\pi}{6} + 2\pi k \end{cases}$ $k \in \mathbb{Z}$
24. a) $(x = \frac{\pi}{6}, y = \frac{\pi}{6})$
 b) $(x = \frac{\pi}{3}, y = \frac{\pi}{6}); (x = \frac{\pi}{3}, y = \frac{5\pi}{6});$
 $(x = \frac{2\pi}{3}, y = \frac{\pi}{6}); (x = \frac{2\pi}{3}, y = \frac{5\pi}{6})$
25. $c = 8,11$ cm
 26. $c = 8,61$ cm
 27. a) $\hat{B} = 48^\circ 35'$, $\hat{C} = 41^\circ 25'$, $c = 13,23$ cm
 $S = 99,22$ cm²
 b) $\hat{A} = 65^\circ$, $a = 9,06$ m, $c = 4,23$ m
 $S = 19,16$ m²
 c) $\hat{A} = 60^\circ 57'$, $\hat{B} = 29^\circ 3'$, $c = 20,59$ mm
 $S = 90$ mm²
 28. a) $\hat{C} = 60^\circ$, $b = 5,22$ dm, $c = 7,04$ dm
 $S = 18,1$ dm²
 b) $\hat{B} = 29^\circ 29'$, $\hat{C} = 70^\circ 31'$, $c = 9,57$ m
 $S = 23,6$ m²
 c) $\hat{A} = 28^\circ 57'$, $\hat{B} = 46^\circ 34'$, $\hat{C} = 104^\circ 29'$
 $S = 72,6$ cm²
 d) $\hat{B} = 37^\circ 53'$, $\hat{C} = 67^\circ 7'$, $a = 12,58$ mm
 $S = 46,4$ mm²

UNIDAD 4

- I. a) $(7, -7)$ d) $(0, -2)$ g) $(-6, -\frac{15}{2})$
 b) $(-1, 6)$ e) $(\frac{9}{2}, 4)$ h) $(-3, -1)$
 c) $(14, -1)$ f) $(16, -2)$
- II. $A(2, 1), B(-1, 3), C(-2, -3), D(-4, 0), E(4, 1)$
1. \overline{AB} y \overline{ED} ; \overline{FA} y \overline{DC}
2. a) Falso
 b) Cierto, pues las rectas paralelas indican la misma dirección.



4. a) Falso, no tiene dirección ni sentido.
 b) Falso, serán coincidentes.
5. a) $(3, -2)$ b) $(6, -9)$ c) $(-5, 1)$ d) $(12, -7)$
6. $\vec{v} = 6\vec{u}_1 + 5\vec{u}_2$, $\vec{w} = -5\vec{u}_1 - \vec{u}_2$



SOLUCIONES

8. $\vec{a} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$ $\vec{c} = -2\vec{i} - 2\vec{j}$
 $\vec{b} = -5\vec{i} + \vec{j}$ $\vec{d} = \vec{i} - 3\vec{j}$

9. a) $(-4, -1)$ d) $(0, 6)$ g) $2\sqrt{5}, 3, \sqrt{17}$
 b) $(-16, 8)$ e) $(-7, 2)$ h) $(-13, 14)$
 c) $(-20, 19)$ f) $(-9, 18)$

10. a) Sí se cumple. b) Sí se cumple.

11. $B(-2, 6)$

12. $\vec{AB} = (10, -7)$

13. $(10, 3)$

14. a) -1

c) $94^\circ 23' 55''$

b) $-\frac{\sqrt{34}}{34}$

d) P. ej., $\vec{w} = (-5, 3)$

15. a) $m = \frac{7}{2}$

c) $m = 3; m = -3$

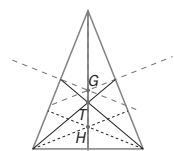
b) $m = -\frac{2}{5}$

d) $m = 0; m = 3$

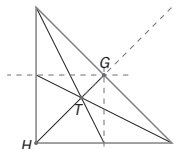
UNIDAD 5

I. $M(3, 8)$

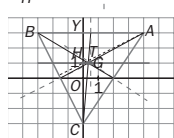
II. G es el baricentro, T es el circuncentro y H es el ortocentro. La recta de Euler en este caso coincide con la mediana, la altura y la mediatriz del lado desigual.



III. La recta de Euler en este caso coincide con la mediana sobre la hipotenusa.



IV. a) $G\left(\frac{1}{3}, 1\right)$



1*. $A \in r, B \notin r, C \in r.$

Por ejemplo, $(-2, 6) \in r$ y $(-2, 0) \in r.$

2. $(x, y) = (5, -2) + \lambda(-2, 2); \begin{cases} x = 5 - 2\lambda \\ y = -2 + 2\lambda \end{cases}$

3. a) $AB \equiv 2x + y + 1 = 0$

b) $AB \equiv y + 3 = 0$

c) $AB \equiv x - 1 = 0$

d) $AB \equiv -2x + 5y + 16 = 0$

4. $AP \equiv 9x - 5y - 3 = 0;$

$CM \equiv 9x - y - 3 = 0; BN \equiv y = 0$

5. $x = -3; y = 5$

6. Vector director $(-6, 1);$ vector normal $(1, 6)$

7. $2(x + 1) - 3(y - 2) = 0;$

$\frac{2}{\sqrt{13}}x - \frac{3}{\sqrt{13}}y + \frac{8}{\sqrt{13}} = 0;$
 $2x - 3y + 8 = 0$

8. Por ejemplo: $\vec{n} = (-3, 2); \vec{u} = (2, 3)$

9. $5x + 4y - 3 = 0; 5(x - 3) + 4(y + 3) = 0;$

$\frac{5}{\sqrt{41}}x + \frac{4}{\sqrt{41}}y - \frac{3}{\sqrt{41}} = 0$

10. $x + 6y - 3 = 0$

11. $x - 2y + 10 = 0$

12. $m = -\frac{7}{3}; b = \frac{8}{3}$

13. a) Secantes en $P(0, 1)$ b) Paralelas

14*. $2x + y + 4 = 0$

15. a) Escaleno b) Equilátero

16. a) $4y + x - 10 = 0$ c) Están alineados
 b) 0

17. a) $\alpha = 81^\circ 52'$ b) $\alpha = 18^\circ 26'$

18. $\hat{A} = 50^\circ 12'; \hat{B} = 79^\circ 36'; \hat{C} = 50^\circ 12'$
 Es rectángulo e isósceles.

19. $P'(4, -11)$

20. $P'(-4, 8)$

21. $r' \equiv y = 1$

22. $B(4, 5)$

23. $\begin{cases} b_1 = (\sqrt{5} - 1)x + (\sqrt{5} + 3)y - 4 = 0 \\ b_2 = (\sqrt{5} + 1)x + (\sqrt{5} - 3)y + 4 = 0 \end{cases}$

a) Se cortan en $P(-1, 1)$ b) $b_1 \perp b_2$

24. a) $T\left(\frac{71}{38}, \frac{125}{38}\right); R = 3,88$

b) $I(2,06; 3,81); R = 1,9$

UNIDAD 6

I. a) $x - 4y - 2 = 0$

b) $\begin{cases} (2\sqrt{2} - \sqrt{5})x + (\sqrt{2} + \sqrt{5})y = 0 \\ (2\sqrt{2} + \sqrt{5})x + (\sqrt{2} - \sqrt{5})y = 0 \end{cases}$

c) $x + y - 7 = 0$

d) $\begin{cases} x + 2y = 2\sqrt{5} \\ x + 2y = -2\sqrt{5} \end{cases}$

e) $3x^2 + 3y^2 - 16x + 16 = 0$

1. a) $x^2 + y^2 + 6x - 2y - 6 = 0$

b) $x^2 + y^2 - 2x + 2y - 8 = 0$

2. a) Sí, $C(1, -2) r = \frac{\sqrt{3}}{3}$ c) Sí, $C(0, 0) r = 3$

b) Sí, $C(3, 0) r = 3$

3. a) Perteneciente b) Interior c) Exterior

4. a) $C(0, 3), r = 5, d(C, r) = 5 = r$

b) $(x = 4, y = 6)$. La recta r es tangente a la circunferencia en el punto $(4, 6)$.

5. a) Exterior b) Secante c) Tangente

6. Tangentes exteriores. Pueden encontrarse en $P(2, 0)$.

7. a) Interiores b) Secantes c) Exteriores

8. P interior, Q perteneciente, R exterior

9. Si $m = 6$ o $m = -2, P \in$ circunferencia

Si $-2 < m < 6, P$ interior a la circunferencia

Si $m < -2$ o $m > 6, P$ exterior a la circunferencia

10. $2x - y - 5 = 0$

11. $\left(x = \frac{107}{26}, y = -\frac{51}{26}\right)$

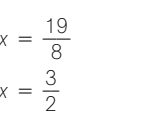
12. a) Eje radical de C_1 y $C_2; x = \frac{19}{8}$

Eje radical de C_2 y $C_3; x = \frac{3}{2}$

Eje radical de C_1 y $C_3; x = -2$

b) Los ejes radicales son tres rectas paralelas, así que no hay centro radical.

13*. $y = \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{9}{2}$

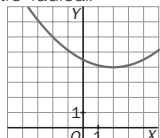


14. a) $F\left(\frac{5}{4}, 3\right)$

$V(1, 3)$

Eje $y = 3$

Directriz $x = \frac{3}{4}$

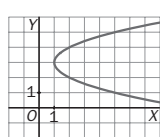


b) $F\left(\frac{5}{4}, -2\right)$

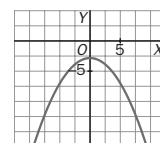
$V(2, -2)$

Eje $y = -2$

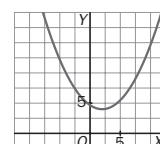
Directriz $x = \frac{11}{4}$



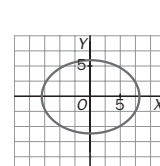
c)* $F\left(0, -\frac{9}{2}\right)$
 $V(0, -3)$
 Eje $x = 0$
 Directriz $y = -\frac{3}{2}$



d) $F\left(2, \frac{11}{2}\right)$
 $V(2, 4)$
 Eje $x = 2$
 Directriz $y = \frac{5}{2}$



15. $\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{25} = 1$



16. a) Centro $(0, 0)$
 Vértices $(8, 0), (-8, 0), (0, 6), (0, -6)$
 Focos $(-\sqrt{28}, 0), (\sqrt{28}, 0)$

Excentricidad $\frac{\sqrt{7}}{4}$

b) Centro $(0, 0)$
 Vértices $(12, 0), (-12, 0), (0, 13), (0, -13)$
 Focos $(0, 5), (0, -5)$

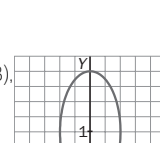
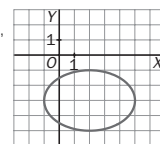
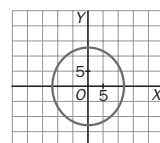
Excentricidad $\frac{5}{13}$

c) Centro $(2, -3)$
 Vértices $(5, -3), (-1, -3), (2, -1), (2, -5)$
 Focos $(2 - \sqrt{5}, -3), (2 + \sqrt{5}, -3)$

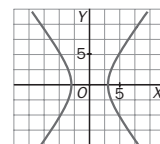
Excentricidad $\frac{\sqrt{5}}{3}$

d) Centro $(0, 1)$
 Vértices $(0, -1), (0, -3), (1, 1), (-1, 1)$
 Focos $(0; 1 - \sqrt{3}), (0; 1 + \sqrt{3})$

Excentricidad $\frac{\sqrt{3}}{2}$



17. a) $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{39} = 1$ b) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{81} = 1$
 c) $4x^2 - y^2 = 4a^2$



18. a) Centro $(0, 0)$
 Vértices $(3, 0), (-3, 0)$
 Focos $(-5, 0), (5, 0)$
 Excentricidad $\frac{5}{3}$

Asíntotas $y = \frac{4}{3}x, y = -\frac{4}{3}x$

b) Centro $(0, 0)$
 Vértices $(4, 0), (-4, 0)$
 Focos $(-\sqrt{32}, 0), (\sqrt{32}, 0)$
 Excentricidad $\sqrt{2}$

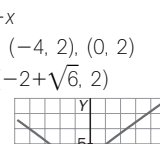
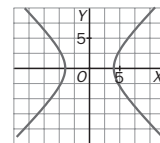
Asíntotas $y = x, y = -x$

c) Centro $(-2, 2)$ Vértices $(-4, 2), (0, 2)$
 Focos $(-2 - \sqrt{6}, 2), (-2 + \sqrt{6}, 2)$

Excentricidad $\frac{\sqrt{6}}{2}$

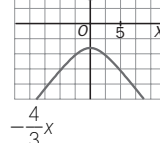
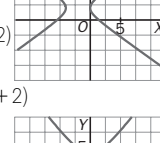
Asíntotas $y - 2 = \frac{\sqrt{2}}{2}(x + 2)$

$y - 2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}(x + 2)$



d) Centro $(0, 0)$
 Vértices $(0, 4), (0, -4)$
 Focos $(0, -5), (0, 5)$
 Excentricidad $\frac{5}{4}$

Asíntotas $y = \frac{4}{3}x, y = -\frac{4}{3}x$



SOLUCIONES

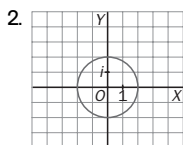
UNIDAD 7

- I. a) Racional d) Real (irracional)
 b) Natural e) Entero
 c) Entero f) Real (irracional)

- II. a) $r = \sqrt{5}$
 $\alpha = 116^\circ 33'$
 b) $r = \sqrt{2}$
 $\alpha = 225^\circ$
 c) $r = \sqrt{5}$
 $\alpha = 333^\circ 26'$

III. $\left(-\frac{5}{2}, \frac{5\sqrt{3}}{2}\right)$

	\bar{z}	$-z$	$ z $
a) $3 - i$	$3 + i$	$-3 + i$	$\sqrt{10}$
b) $-2 - \sqrt{2}i$	$-2 + \sqrt{2}i$	$2 + \sqrt{2}i$	$\sqrt{6}$
c) -5	-5	5	5
d) $\sqrt{3}i$	$-\sqrt{3}i$	$-\sqrt{3}i$	$\sqrt{3}$



3. a) $5 - \sqrt{3} + 9i$
 b) $5 + \sqrt{3} + 5i$
 c) $24\sqrt{3} - 140 - (70\sqrt{3} + 48i)$
 d) $\frac{-\sqrt{3} - 2i}{7}$
 e) $-15 + 49i$
 f) $-5\sqrt{3} - 14 + (10 - 7\sqrt{3})i$

4. $m = \frac{7}{3}, n = -4$

5. a) $\frac{13}{5} - \frac{6}{5}i$ c) i e) $27i$
 b) -1 d) $41 + 38i$ f) $\frac{2}{25} + \frac{3}{50}i$

6. a) $1_{90^\circ} = 1 (\cos 90^\circ + i \sin 90^\circ)$
 b) $4(\cos 315^\circ + i \sin 315^\circ) = 2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}i$
 c) $-1 + \sqrt{3}i = 2_{120^\circ}$
 d) $1_{225^\circ} = \cos 225^\circ + i \sin 225^\circ$

7. a) $z_1 = 6_{150^\circ} = 6(\cos 150^\circ + i \sin 150^\circ)$
 $z_2 = 1_{270^\circ} = \cos 270^\circ + i \sin 270^\circ$
 $z_3 = \sqrt{2}_{225^\circ} = \sqrt{2}(\cos 225^\circ + i \sin 225^\circ)$

b) $z = 3\sqrt{3} - 3 - (3\sqrt{3} + 3)i = 6\sqrt{2}_{285^\circ} = 6\sqrt{2}(\cos 285^\circ + i \sin 285^\circ)$

8. a) $12_{150^\circ} = 12(\cos 150^\circ + i \sin 150^\circ) = -6\sqrt{3} + 6i$

b) $20_{\frac{3\pi}{4}} = 20\left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4}\right) = -10\sqrt{2} + 10\sqrt{2}i$

c) $3_{270^\circ} = 3(\cos 270^\circ + i \sin 270^\circ) = -3i$

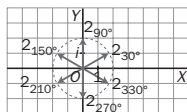
d) $\left(\frac{4}{5}\right)_{\frac{\pi}{4}} = \frac{4}{5}\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right) = \frac{2\sqrt{2}}{5} + \frac{2\sqrt{2}}{5}i$

e) $1296_{180^\circ} = 1296(\cos 180^\circ + i \sin 180^\circ) = -1296$

f) $30_{120^\circ} = 30(\cos 120^\circ + i \sin 120^\circ) = -15 + 15\sqrt{3}i$

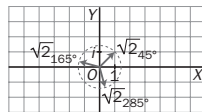
9. a) $\alpha = \frac{\pi}{4}$ b) $\alpha = \frac{5\pi}{4}$ c) $\alpha = \frac{3\pi}{4}$

10. $2_{30^\circ}, 2_{90^\circ}, 2_{150^\circ}, 2_{210^\circ}, 2_{270^\circ}, 2_{330^\circ}$

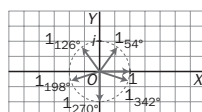


11. $\sqrt[3]{4}_{50^\circ}, \sqrt[3]{4}_{170^\circ}, \sqrt[3]{4}_{290^\circ}$

12. a) $\sqrt{2}_{45^\circ}, \sqrt{2}_{165^\circ}, \sqrt{2}_{285^\circ}$



- b) $1_{54^\circ}, 1_{126^\circ}, 1_{198^\circ}, 1_{270^\circ}, 1_{342^\circ}$



13. $z_1 = 2, z_2 = 2i, z_3 = -2i$

14. $z_1 = 2, z_3 = 2_{180^\circ} = -2$
 $z_2 = 2_{90^\circ} = 2i, z_4 = 2_{270^\circ} = -2i$

15. $z_3 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i, z_4 = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$
 $z_2 = i, z_5 = -i$
 $z_3 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i, z_6 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$

UNIDAD 8

I.

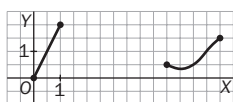
$\begin{matrix} 0 & 4 & 8 \end{matrix}$	$(4, 8)$	$\{4 < x < 8\}$	$ x - 6 < 2$
$\begin{matrix} -6 & 0 \end{matrix}$	$[-6, 0]$	$\{-6 \leq x \leq 0\}$	$ x + 3 \leq 3$
$\begin{matrix} -10 & 3 \end{matrix}$	$(-1, 3]$	$\{-1 < x \leq 3\}$	$ x - 1 < 2 \cup \{3\}$
$\begin{matrix} -7 & 0 & 3 \end{matrix}$	$\mathbb{R} - [-7, 3]$	$\{x < -7 \cup x > 3\}$	$ x + 2 > 5$

- II. a) No tiene. $\alpha = 90^\circ$
 b) $m = 2, \alpha = 63^\circ 26'$
 c) $m = 0, \alpha = 0^\circ$
 d) $m = -\frac{2}{3}, \alpha = 146^\circ 18'$
 e) No tiene. $\alpha = 90^\circ$
 f) $m = 1, \alpha = 45^\circ$

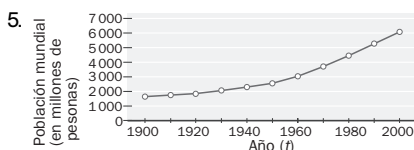
- III. a) $[-1, 8]$ b) $(0, +\infty)$

1. a) $D(f) = \mathbb{R}$
 b) $D(f) = \mathbb{R} - \{2\}$
 2. a) $D(f) = [0, +\infty), R(f) = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$
 b) $D(f) = \{-1, 1\}, R(f) = \{0\}$
 c) $D(f) = \mathbb{R}, R(f) = \left[0, \frac{1}{2}\right]$

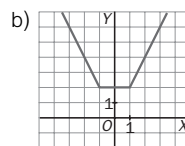
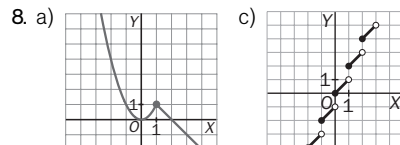
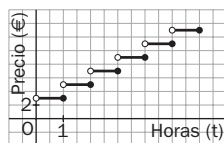
3. Respuesta abierta, por ejemplo:



4. $D(f) = (-\infty, 2) \cup (2, 4) \quad R(f) = (-\infty, 3)$
 $D(g) = [0, 1] \cup [1.5, 2.5] \quad R(g) = [-1, 1]$



6. c
 7.



9. a) $\left(\frac{g}{h}\right)(x) = \frac{\sqrt{x+3}}{x^2-4}$

$D\left(\frac{g}{h}\right) = [-3, +\infty) - \{-2, 2\}$

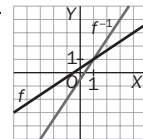
b) $(f \circ g)(x) = \frac{\sqrt{x+3}}{x+2}$
 $D(f \circ g) = [-3, +\infty) - \{-2\}$

c) $(g \circ f)(x) = \sqrt{\frac{3x^2+x-3}{x^2-1}}$
 $D(g \circ f) = \mathbb{R} - \left\{\left[\frac{-\sqrt{37}-1}{6}, -1\right] \cup \left[\frac{\sqrt{37}-1}{6}, 1\right]\right\}$

d) $(f \circ g \circ h)(x) = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^2-2}$
 $D(f \circ g \circ h) = \mathbb{R} - \{(-1, 1), -\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$

10. $D(f^{-1}) = \mathbb{R} - \{0\}$

11. $f_{(x)}^{-1} = \frac{3x-1}{2}$



12. $x \in [1.6; 1.61]$

13. a)	x	-0,9	-0,99	-1,001	-1,01
	f(x)	-0,52	-0,502	-0,499	-0,497
b)	x	7,01	7,001	6,999	6,99
	f(x)	2,0006	2,00006	1,9999	1,9993
c)	x	3,9	3,99	4,01	4,1
	f(x)	3,97	3,99	4,002	4,02
d)	x	-0,1	-0,01	0,01	0,1
	f(x)	3,0934	3,0009	3,0009	3,0934
e)	x	1,9	1,99	2,01	2,1
	f(x)	1,268	1,40	1,428	1,55
f)	x	7,9	7,99	8,01	8,1
	f(x)	11,94	11,99	12,004	12,04

Los límites son: a) $-0,5$; b) 2 ; c) 4 ; d) 3 ; e) $\sqrt{2}$; f) 12

14. a) $f(a) = 2 \quad f(b) = 0 \quad f(c) = \text{no existe}$
 b) $\lim_{x \rightarrow b^+} f(x) = 2, \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = 2, \lim_{x \rightarrow b} f(x) = 2$
 $\lim_{x \rightarrow b^+} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = 3, \lim_{x \rightarrow b} f(x) = \text{no existe}$
 $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = \text{no existe}, \lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow c} f(x) = \text{no existe}$

15. a) 0 b) $\frac{5}{3}$ c) 0 d) $\frac{3}{2}$ e) $+\infty$ f) 0

16. a) 2 b) 0 c) 0

17. a) $-\infty$ c) $-\infty$ e) $-\infty$
 b) $+\infty$ d) $+\infty$ f) $+\infty$

18. a) $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow b^+} f(x) = +\infty$
 b) $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow b^+} f(x) = \text{no existe}$
 c) $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = \text{no existe}, \lim_{x \rightarrow b^+} f(x) = +\infty$

19. a) 0 b) $-\frac{3}{4}$

20. $\lim_{x \rightarrow b} f \cdot g = 0 \quad \lim_{x \rightarrow b} f^g = 1$
 $\lim_{x \rightarrow b} f : g = \infty \quad \lim_{x \rightarrow b} g^f = 0$

SOLUCIONES

21. $-\frac{1}{2}y = 0$

22. a) A.V. $x = 3$, $x = -3$; A.H. $y = 0$
 b) A.V. $x = -1$, $x = -2$; A.O. $y = 3x - 7$
 c) A.V. $x = 0$, A.H. $y = \frac{2}{3}$
 d) A.V. $x = 0$, A.H. $y = 4x$

23. a) $y = x$ A.O. por la derecha
 $y = -x$ A.O. por la izquierda
 b) $x = -3$ A.V.; $y = -x + \frac{3}{2}$ A.O. por la izquierda
 $y = x - \frac{3}{2}$ A.O. por la derecha

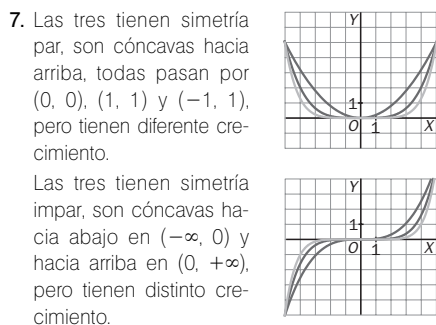
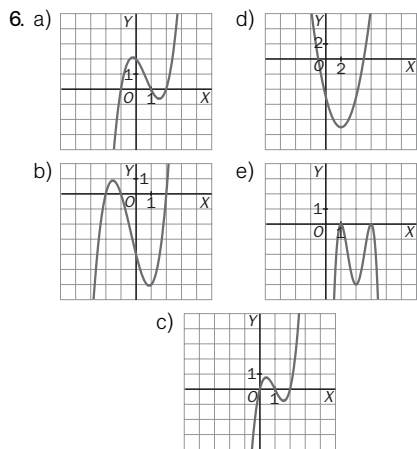
- d) A.H. $y = 3$ d) A.H. $y = 1$
 24. a) \mathbb{R} d) $\mathbb{R} - \{0\}$ g) $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$
 b) $\mathbb{R} - \{1\}$ e) \mathbb{R} h) $\mathbb{R} - \{1\}$
 c) $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$ f) $\mathbb{R} - \{3, 4\}$

25. a) 2 b) $\frac{3}{4}$
 26. $k = -\frac{3}{2}$
 27. a) $\frac{3}{2}$ b) 1 c) 0 d) 0
 28. a) Converge a 0. c) No converge.
 b) Converge a 0.

29. Respuesta abierta, por ejemplo:
 a) $\frac{n-2}{n}$ b) n^2 c) $\frac{1}{n}$ d) $\frac{n^2}{2n-41}$
 30. Sí lo es. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2$.
 31. a) 0 b) -2 c) $\frac{5}{2}$
 32. a) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = e^2$ c) $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = e^{-6}$ e) $\lim_{n \rightarrow \infty} e_n = e$
 b) $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = 1$ d) $\lim_{n \rightarrow \infty} d_n = e^2$ f) $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = 1$

UNIDAD 9

- I. a) $x = 6$, $x = -2$, $P(x) = (x+2)(x-6)$
 b) $x = 0$, $Q(x) = 2x(x^2 + x + 3)$
 II. a) $\frac{1}{4}$ b) $\frac{1}{5}$ c) 10 d) 3
 III. a) $\cos \alpha = \frac{4}{5}$, $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{3}{4}$
 b) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
 IV. a) $-\operatorname{tg} \frac{\pi}{4}$ b) $-\cos \frac{\pi}{6}$ c) $\sin \frac{\pi}{3}$
 1. a) $(0, -5)$ $\left(\frac{5}{6}, 0\right)$
 $f(x) < 0$ en $(-\infty, \frac{5}{6})$, $f(x) > 0$ en $(\frac{5}{6}, +\infty)$
 b) $(0, -4)$ $(1, 0)$ $(-4, 0)$
 $f(x) < 0$ en $(-4, 1)$, $f(x) > 0$ en $(-\infty, -4) \cup (1, +\infty)$
 c) $(0, -6)$ $(3, 0)$ $(-2, 0)$
 $f(x) < 0$ en $(-\infty, -2) \cup (0, 1)$, $f(x) > 0$ en $(-2, -1) \cup (3, +\infty)$
 2. Respuesta abierta, por ejemplo:
 $f(x) = -(x-1)(x-3) = -x^2 + 4x - 3$
 3. a) Par b) Par c) Impar d) Ni par ni impar
 4. a) Por ejemplo, $f(x) = x^4 + x^2$. Par
 b) Por ejemplo, $f(x) = 3x^5 - 2x$. Impar
 c) Por los exponentes
 5. a) Corte con el eje X: $(-5, 0)$ $(0, 0)$ $(5, 0)$
 Corte con el eje Y: $(0, 0)$
 Simetría impar
 b) Corte con el eje X: $(-\sqrt{2}, 0)$ $(0, 0)$ $(\sqrt{2}, 0)$
 Corte con el eje Y: $(0, 0)$
 Simetría par
 c) Corte con el eje X: $(-3, 0)$ $(1, 0)$ $(2, 0)$
 Corte con el eje Y: $(0, 6)$
 No tiene simetría impar ni par.
 d) Corte con el eje X: $(-2, 0)$ $(2, 0)$
 Corte con el eje Y: $(0, -16)$
 Simetría par



8. a) Mínimo grado 3
 Coeficiente de mayor grado positivo
 b) Mínimo grado 4
 Coeficiente de mayor grado positivo
 c) Mín. grado 5
 Coeficiente de mayor grado positivo
 9. a) $D(f) = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$
 Corte con los ejes: $(0, 0)$
 Impar. $f < 0$ en $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$
 $f > 0$ en $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$
 A.V. $x = 1$, $x = -1$; A.H. $y = 0$
 b) $D(f) = \mathbb{R} - \{-3, 3\}$
 Corte con los ejes: no hay. Par.
 $f < 0$ en $(-3, 3)$
 $f > 0$ en $(-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$
 A.V. $x = 3$, $x = -3$; A.H. $y = 1$
 10. a) $D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$
 Corte con los ejes: no hay. Impar
 $f < 0$ en $(-\infty, 0)$
 $f > 0$ en $(0, +\infty)$
 A.V. $x = 0$; A.O. $y = x$
 b) $D(f) = \mathbb{R} - \{1\}$
 Corte con los ejes: $(0, 0)$ $(3, 0)$
 Ni par ni impar
 $f < 0$ en $(-\infty, 0) \cup (1, 3)$
 $f > 0$ en $(0, 1) \cup (3, +\infty)$
 A.V. $x = 1$; A.O. $y = x - 2$
 11. a) $D(f) = (-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$
 Ni par ni impar.
 A.O. $y = x - \frac{3}{2}$,
 $y = -x + \frac{3}{2}$
 b) $D(f) = (-\infty, 0) \cup (0, 1]$
 Ni par ni impar
 No hay asíntotas.

12. a) Corte con los ejes: $(-1, 0)$ $(1, 0)$ $(0, -1)$
 $D(f) = \mathbb{R}$; par
 No tiene asíntotas.
- b) $D(f) = \mathbb{R} - \{2\}$
 Ni par ni impar
 A.H. $y = 0$
 A.V. $x = 2$
13. a) $x = -9, -7, -4, -2, 1, 3, 6, 8, 11, 13$
 b) $f < 0$ en $(-4, -2) \cup (1, 3) \cup (6, 8)$
 $f > 0$ en $(-6, -4) \cup (-2, 1) \cup (3, 6)$
 c) Máx. en $x = 10, 15, 20$
 Mín. en $x = 12, 17$
14. a) Periódica $T = 1$ c) Periódica $T = 1$
 b) Periódica $T = 1$ d) No periódica
15. Respuesta abierta, por ejemplo:
16. Respuesta abierta, por ejemplo:
17. $f(x) = f(x+T) = f[(x+T)+T] = f[(x+2T)+T] = f(x+3T)$
- 18.
19. $m_1 < m_3 < m_2$
 $m_3 = 1$
- 20.
- 21.

SOLUCIONES

UNIDAD 10

I. a) $y = -2x - 3$
 b) $y = \frac{1}{5}x - \frac{3}{5}$
 c) $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x - \frac{4\sqrt{3} + 6}{3}$

II. a) TVM $g\left[0, \frac{\pi}{3}\right] = -\frac{3}{2\pi}$
 b) TVM $h[-1, 1] = 0$

1. a) TVM $f[0, h] = \frac{\sqrt{h+4} - 2}{h}$

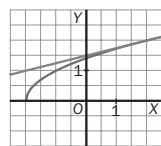
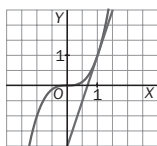
b) TVI $f(0) \approx 0.25 = \frac{1}{4}$

c) TVI $f(0) = \frac{1}{4}$

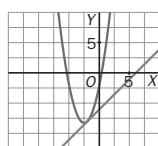
2. TVI $f(-1) = -7$

3. TVI $\sin(0) = 1$

4. a) $y = 3x - 2$ c) $y = \frac{1}{4}x + \frac{3}{2}$



b) $y = x - 6$



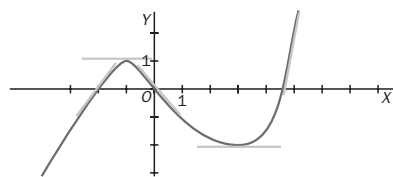
5. a) $f'(2) \approx 3$

b) No, pues si calculamos $\frac{f(4+h) - f(4)}{h}$

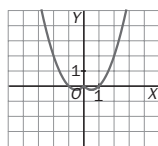
para valores pequeños de h para los que conocemos $f(4+h)$ obtenemos valores muy distantes, luego parece que no va a existir $f'(4)$.

6. $f'(-1) \approx 2$, $f'(0) \approx 0.7$, $f'(1) \approx 0$, $f'(2) \approx -2$, $f'(3) \approx 0$, $f'(5) \approx 1.5$.

7. Respuesta abierta, por ejemplo:

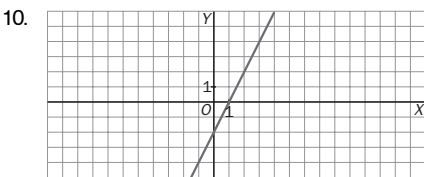


8.



No tiene tangente en el origen. Función no derivable en $x = 0$.

9. a) Sí b) No coinciden los límites. c) No



11. a) $f'(x) = 15x^2$

b) $f'(x) = -\frac{x}{4}$

c) $f'(x) = \sqrt{2}$

12. a) $f'(x) = 4x^3 - 3$
 b) $f'(x) = 4x^3 + 4x$
 c) $f'(x) = -6x^5 + 30x^4 - 20x^3 + 54x^2 + 12x$
 d) $f'(x) = -12x + 31$

13. a) $f'(x) = -\frac{1}{(x-3)^2}$

b) $f'(x) = -\frac{x^2 + 5}{(x^2 - 5)^2}$

c) $f'(x) = \frac{4x}{(x^2 + 1)^2}$

14. a) 7

b) -1

15.

$(f \circ g)(x)$	$(f \circ g)'(x)$
4	0
2	4
-1	-3
1	4

16*. $(g \circ f)'(-1) = -2$;

$(g \circ f)'(2) = 10$;

17. a) $f'(x) = 5(x-1)^4$

b) $f'(x) = 12(3x+2)^3$

c) $f'(x) = 6(x^3 - 2x^2 + x - 3)^5 \cdot (3x^2 - 4x + 1)$

d) $f'(x) = \frac{3x^2 - 1}{2\sqrt{x^3 - x}}$

18. a) $f'(x) = 4(x^3 + 4x - 2)^3(7x^4 + 9x^2 - 2x - 4)$

b) $f'(x) = 8 \cdot \frac{3x-4}{x^3} = \frac{24x-32}{x^3}$

c) $f'(x) = \frac{-6x^2 - 3x}{2\sqrt{x}(2x-1)^4}$

d) $f'(x) = \frac{25x^5 - 16x - 5}{2\sqrt{5x-4}}$

19. a) $f'(x) = \frac{15(3x-5)^4}{2\sqrt{(3x-5)^3 - 1}}$

b) $f'(x) = \frac{(6x-3)\sqrt{x^2-x}}{2}$

c) $f'(x) = (3x^2 + 2) + \frac{3(3x^2 + 2)}{(x^3 + 2x)^4}$

d) $f'(x) = \frac{5x^2 - 5x + x\sqrt{x^2+x}}{2\sqrt{x^2+x}(3x-1)^3}$

20*. a) $h(-3) = 2$, $h(2) = 2$

b) $f'(-3) = -1$, $f'(2) = 1$, $g'(-3) = 1$, $g'(2) = 0$

c) > 0 al ser creciente en $x = 3$.

d) $y = 2$

21. a) Falsa

Considera $f(x) = x^2$. En $x = 0$ la función tiene un mínimo, luego allí no es ni creciente ni decreciente, y $f'(0) = 0 \leq 0$.

b) Verdadera

Si $f'(x_0) > 0$, la recta tangente en $P(x_0, f(x_0))$ tiene pendiente positiva, luego f es creciente en ese punto.

c) Verdadera

Usando el apartado anterior, si $f'(x_0)$ fuera positiva, la función sería creciente; luego si f es decreciente, debe ser $f'(x_0) \leq 0$.

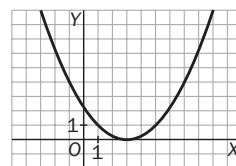
22. $x = -1$, $x = 0$, $x = 1$

23. La función tiene un máximo en P .

24. a) Máximo relativo en $P(0, 4)$ y mínimos relativos en $Q(-1, 3)$ y $R(1, 3)$

b) No tiene máximos ni mínimos relativos. Es creciente en todo su dominio.

25. Respuesta abierta, por ejemplo:



26.

	Valor máximo	Valor mínimo
a)	$\sqrt{10}$	1
b)	10	$-\frac{9}{4}$
c)	16	-4
d)	126	-6,065
e)	38	-6550
f)	0	-9

27. No hay solución.

28. 2500 camisetas

29. Dos lados de 50 m y el tercero de 100 m

UNIDAD 11

I. a) $2^{3 \log_2 x}$
 b) $10^{\frac{1}{2} \log_{10} x}$
 c) $e^{\ln \sin x}$
 d) $e^{x \ln 2}$

II. a) $\ln f(x) = 4 \ln x$
 b) $\ln f(x) = x$
 c) $\ln f(x) = x \ln x$
 d) $\ln f(x) = (x+3) \ln(\sin x)$

1. $(\sqrt{x})^2 = x$. Entonces, $(2\sqrt{x})(\sqrt{x})' = 1$, por lo que $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

2. $\frac{1}{13}$

3*. $\frac{2}{3}$

4. $y = \frac{x}{80} + \frac{8}{5}$

5. a) $f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} + \frac{1}{\sqrt{x}}$

b) $f'(x) = \frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}} - \frac{2}{\sqrt[3]{x}} + 1$

c) $f'(x) = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{\sqrt[5]{x^2}} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{x}} - 2x - 2$

6. Si, $\left(\frac{1}{\sqrt[4]{15^5}}, \frac{1}{\sqrt[4]{15}}\right)$ y $\left(\frac{-1}{\sqrt[4]{15^5}}, \frac{-1}{\sqrt[4]{15}}\right)$

7. a) $f'(x) = \frac{-7}{4x\sqrt[4]{x^7}}$ b) $f'(x) = \frac{2}{5\sqrt[5]{x^3}}$

8. a) $\frac{5}{12}$

b) $f^{-1}(x) = \frac{x^2 - 3}{5}$, $(f^{-1})'(x) = \frac{3x^2}{5}$

c) $(f^{-1})'(f(1)) = \frac{12}{5}$, $(f^{-1})'(f(1)) = \frac{1}{f'(1)}$

9. a) $f'(x) = e^{3x^2 - 5x + 1}(6x - 5)$

b) $f'(x) = e^x(x^2 - 5x - 10)$

c) $f'(x) = \frac{e^{3x^3}(3x^3 - 1) + 2x^3}{x^2}$

d) $f'(x) = \frac{e^x}{2\sqrt{x}}(1 + 2x)$

SOLUCIONES

10. (3, e⁻⁹) es un mínimo relativo.

11. a) $2 \ln 7 \cdot 7^{2x}$

b) $\frac{2\sqrt{x} \ln 2}{2\sqrt{x}}$

c) $(3x^2 - 1) \cdot \ln 3 \cdot 3^{x^3 - x}$

d) $4 \ln 5 \cdot x^{5 \cdot 2x^2}$

e) $\frac{\ln 9}{2\sqrt{x}} \cdot 9^{\sqrt{x} + 1}$

f) $4 \ln 8 \cdot x^3 \cdot 8^{x^4}$

12. a) $\frac{3x^2 - 2}{x^3 - 2x + 1}$

d) $\frac{2x + e^x}{2(x^2 + e^x)}$

b) $e^x \ln x + \frac{e^x}{x}$

e) $\frac{1}{2x\sqrt{\ln x}}$

c) $\frac{1}{\ln 2} \cdot \frac{6x}{3x^2 - 1}$

f) $\frac{5}{\ln 2} (\ln x + 1)$

13. Mínimo P(0, ln 4)

14. a) $(\ln x + 1)x^x$

b) $2 \ln x \cdot x^{\ln x - 1}$

c) $(\sqrt{x})^{e^x} \frac{e^x}{2} \left(\ln x + \frac{1}{x} \right)$

d) $x^{x^2 + 1} [2 \ln x + 1]$

e) $x^{2x + 1} \left[2 \ln x + \frac{2x + 1}{x} \right]$

f) $x^{\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{x}} \left[\frac{\ln x}{2} + 1 \right]$

15. y = x

16. a) $(\cos(x^2 + e^{2x}))(2x + 2e^{2x})$

b) $\frac{-\sin x}{2\sqrt{\cos x}}$

c) $\frac{2 \sin x}{\cos^3 x}$

d) $\sin(3x - 2) + 3x \cos(3x - 2)$

17. Ninguno

18. A $\left(\frac{\pi}{4}, \sqrt{2} \right)$; B $\left(\frac{5\pi}{4}, -\sqrt{2} \right)$

19. a) $\frac{e^x}{\sqrt{1 - e^{2x}}}$

b) $\frac{2x}{1 + (1 + x^2)^2}$

c) $-\frac{1}{2\sqrt{1 - x^2} \sqrt{\arccos x}}$

d) $\frac{1}{\sin x + \arcsin x} \left(\cos x + \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \right)$

20. Ninguno

21. f'(x) = 0

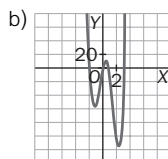
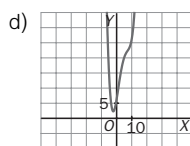
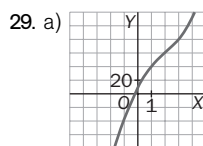
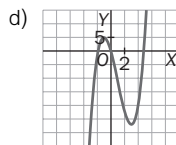
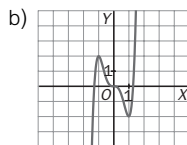
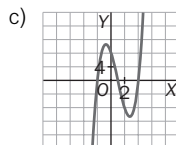
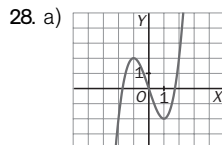
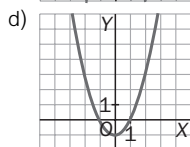
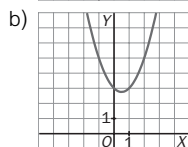
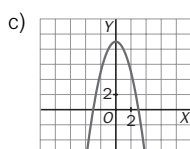
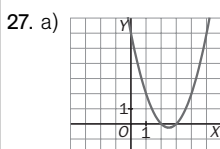
22. f'(x) = $\frac{-1}{1 + x^2}$

23. Máx. (0, 0) Mín. (-1, -3)(1, -3)

24. Cóncava hacia arriba en $(-\infty, -1) \cup (7, +\infty)$, cóncava hacia abajo en $(-1, 7)$, puntos de inflexión en $x = -1$ y $x = 7$.

25. $y - \frac{\sqrt{3}}{4} = -\frac{1}{8}(x - \sqrt{3})$

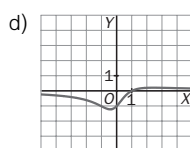
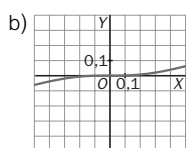
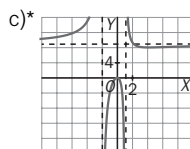
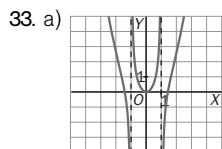
26. No



30*. Por ejemplo: $f(x) = x^3 + x^2 + x + d$

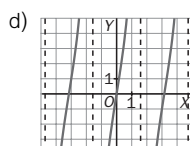
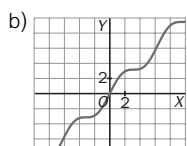
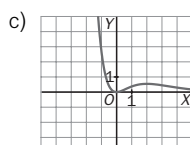
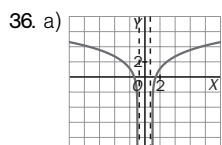
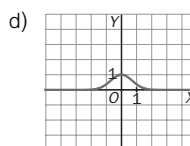
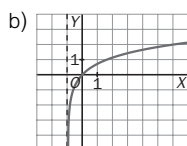
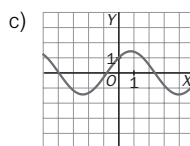
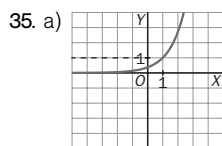
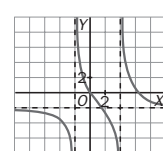
31. $f(x) = x(x - 1)(x + 1)$

32. No es posible.



34*. La función se ha de anular 2 veces.

No es posible que la derivada segunda no se anule.



UNIDAD 12

1. a) $F(x) = \frac{3}{2}(x^2 - 2x + 1)$,

$F'(x) = 3x - 3$

b) $F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 & \text{si } x \leq 3 \\ -\frac{1}{2}x^2 + 6x - 9 & \text{si } 3 < x \leq 6 \end{cases}$

$F'(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \leq 3 \\ -x + 6 & \text{si } x > 3 \end{cases}$

1. a) $4 u^2$

b) $2 u^2$

2. $\frac{16}{3} u^2$

3. $\frac{8}{3} u^2$

4. $\frac{32}{3} u^2$

5. $(\sqrt{2} - 1) u^2$

6. $1 u^2$

7. $\frac{37}{12} u^2$

8. $\left(\frac{1}{2} + \ln 2 \right) u^2$

9. a) $\frac{2x^5}{5} - x^3 + x + C$

b) $\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{x} + \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + C$

c) $\frac{-2}{\sqrt{x}} - \frac{1}{2}x^2 + 2 \ln |x| + C$

d) $\frac{6}{13}\sqrt[6]{x^{13}} + C$

10. a) $-3e^x + C$

b) $\frac{1}{\ln 3}3^x - 4 \ln |x| + C$

c) $-5 \cos x + \arccos x + C$

d) $\frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4} - \sin x + C$

11. a) $\sqrt{t^2 + 2t + 3} + C$

b) $\frac{1}{2}\ln(1 + e^{2t}) + C$

c) $\frac{5}{42}(x^2 + 1)^{21} + C$

d) $\sin(\ln t) + C$

e) $\arctg e^t + C$

f) $\arcsin x^2 + C$

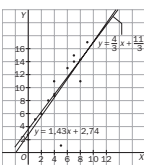
12. a) $-\frac{1}{20}\cos^5 x^2 + C$

b) $-\frac{1}{3}\ln |\cos(3x + 2)| + C$

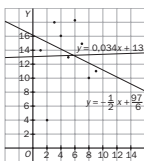
13. Ambas son $\frac{2 \sin x}{\cos^3 x}$, luego f y g difieren en una constante.

SOLUCIONES

UNIDAD 13

- I. Respuesta abierta, por ejemplo:
- Aficiones deportivas; comunidad de nacimiento; nombre
 - Número de hermanos; número de faltas a clase; número de amigos de los alumnos de clase.
 - Distancia, en km, del instituto a su casa; medida, en centímetros, de la palma de la mano; medida, en centímetros, del perímetro torácico
- $\bar{x} = 18$ años; $M_o = 19$ años; $M = 19$ años
 - $r = 7$ años; $s^2 = 4,95$ años²; $s = 2,22$ años
 - $\bar{x} = 21,79$; $M_o = 22,5$; $M = 22,5$
 - $r = 25$; $s^2 = 33,83$; $s = 5,82$
 - $\bar{x} = 6,04$, $\bar{y} = 5,62$
 $s_x^2 = 0,79$, $s_y^2 = 1,19$
 $s_{xy} = 0,505$
 - $\bar{x} = 35$, $\bar{y} = 10,17$
 - $s_x^2 = 402,67$; $s_y^2 = 27,74$
 - $s_{xy} = -105,78$
- R. lineal negativa y funcional
6. Sí, existe una correlación lineal positiva fuerte.
7. 0: gráfica 3; 0,8: gráfica 1; -1: gráfica 2
- $r = 0,946$
 - $r = 0,232$
 - Cuando no se tiene en cuenta el último resultado, la correlación es más fuerte, mientras que al estudiar todos, ese último dato nos indica que realmente no existe una dependencia aleatoria tan directa.
 - Índice previsto: 171. Como $r = -0,97$, la dependencia es aleatoria inversa fuerte, es fiable.
 - 50 kg
 - $r = 0,97$, sí, se puede considerar.
 - 3280 €
 - El 33% de la variación de Y puede ser debido (explicado) por la variación de X si usamos el modelo lineal de regresión. El 67% restante puede deberse al azar o a la influencia sobre Y de otras variables distintas.
 - No tiene mucho sentido salvo para puntos muy cercanos al par (\bar{x}, \bar{y})
 - 49%
 - No tiene mucho sentido.
 - $y = \frac{4}{3}x + \frac{11}{3}$
 - $y = 1,43x + 2,74$
- 

$y = 1,43x + 2,74$



$y = -0,034x + 13,05$
- $y = 0,034x + 13,05$
 - $y = -\frac{1}{2}x + \frac{97}{6}$

UNIDAD 14

- 80000000 matrículas
- 80 menús
- 4896
- 90; 720
- 210
 - 90
 - 120
- 25
- 81
 - 729
- 125
 - 50
- 4782969
- 59049
- 9000
 - 1800
 - 900
- 5040
- 24
- 5040
 - 1440
- 1663200
- 792
- 60
 - 20
 - Ninguno
 - 12
- 142506
- 220 triángulos
- 84
- 1680

UNIDAD 15

- $E = \{1, 2, X\}$
 $S = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{X\}, \{1, 2\}, \{1, X\}, \{2, X\}, \{1, 2, X\}\}$
 - 2^n
 - $E = \{1C, 1X, 2C, 2X, 3C, 3X, 4C, 4X, 5C, 5X, 6C, 6X\}$
- $A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30, 32, 34, 36\}$
 $\bar{A} = \{0, 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31, 33, 35\}$
 $B = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$
 $\bar{B} = \{0, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36\}$
 $C = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
 $\bar{C} = \{10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36\}$
 $D = \{11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36\}$
 $\bar{D} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$
 $E = \{0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33, 36\}$
 $\bar{E} = \{1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11, 13, 14, 16, 17, 19, 20, 22, 23, 25, 26, 28, 29, 31, 32, 34, 35\}$
 - $A \cup \bar{B} = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30, 32, 34, 36\}$
 $B \cap E = \{3, 6, 12\}$
 $C - A = \{0, 1, 3, 5, 7, 9\}$
 - $A \cup \bar{B} = \{XXX, CCC, CCX, CXC, XCC\}$
 $A \cap B = \{XXX\}$; $A - B = \{CCC\}$
 - Respuesta abierta, por ejemplo, $A \cap B$ y $A - B$, respectivamente
 - Sí, se cumple.
 - $p(I) = 0,4$, no está equilibrado.
 - $p(R) = \frac{2}{5}$
 - $p(V) = \frac{7}{20}$
 - $p(A) = \frac{1}{4}$
 - $p(\bar{R}) = \frac{3}{5}$

- $\frac{1}{4}$
 - $\frac{1}{4}$
 - $\frac{3}{4}$
- 0,7
 - 0,6
 - 0,6
- 0,1
 - 0,7
 - 0,4
- 0,8
 - 0,41
 - 0,4
- 0,1
 - 0,1
- $\frac{4}{25}$
 - $\frac{3}{20}$
- 0,3
- 0,4 y 0,5
- 0,26
 - 0,93
- $\frac{4}{27}$
 - $\frac{1}{3}$
- $\frac{1}{32}$
 - $\frac{1}{32}$
 - No.
- $\frac{11}{18}$
- 0,8826
- $\frac{10}{41} = 0,2439$
- $0,33 = \frac{35}{107}$
- 0,22
- 0,71
- 0,577

UNIDAD 16

- Aunque para ambas actividades se pueden dar muchos resultados distintos, lo que sí deberían obtener los alumnos, y así hay que hacérselo notar, es que el valor medio de las frecuencias absolutas debe encontrarse entre 8 y 9 (8,33) para el caso de 50 tiradas y entre 16 y 17 (16,67) para el caso de 100. Además la dispersión de las frecuencias obtenidas alrededor de dichos valores medios debe ser inferior cuando se realizan 100 tiradas del dado.
- Respuesta abierta, por ejemplo: Resultados obtenidos al lanzar una moneda, recorrido C, X
Número de hijos, recorrido 0, 1, 2, 3...
 - Respuesta abierta, por ejemplo: Altura de un edificio, recorrido $[0, 600]$ m
Tiempo de una carrera de 100 m, recorrido $[9,70; 60]$ s.
 - Mediante una tabla:

x_i	0	1	2	3	4	5
p_i	$\frac{6}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{8}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{2}{36}$
 - $\mu = 1,94$ $\sigma^2 = 2,05$ $c) p(X \leq 3) = 0,83$
 - 0,027
 - 0,189
 - 0,343
 - No se puede aplicar la distribución binomial.
 - $\frac{27}{56}$
 - $\frac{27}{28}$
 - 0,267
 - 0,000006
 - 0,215
 - 0,618
 - $\mu = 6$ corderos blancos
 - 10
 - 57,5
 - 0,672
 - 0,495
 - 0,0322
 - 0,00033
 - 0,2981
 - Es la c, pues $np = 32$, y $\sqrt{npq} = 4$; las demás no lo cumplen.