

2.51. Indica si los siguientes sistemas son compatibles o incompatibles, y calcula, según el caso, todas sus soluciones.

$$a) \begin{cases} x + 3y - 2z = 6 \\ 2x + 3y - 2z = 8 \\ 4x + 2y - 6z = 6 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} 2x + y - 2z = 8 \\ 2x - 4y + 3z = -2 \\ 4x - y + 6z = -4 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x + 2y - 3z = 3 \\ 3x - 2y + z = 7 \\ 5x + 2y - 5z = 1 \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} x + 3y - 2z = -6 \\ 2x - 3y + 5z = 6 \\ 5x - 3y + 8z = 6 \end{cases}$$

$$a) \begin{cases} x + 3y - 2z = 6 \\ 2x + 3y - 2z = 8 \\ 4x + 2y - 6z = 6 \end{cases} \begin{matrix} E_2 - 2E_1 \\ E_3 - 4E_1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} x + 3y - 2z = 6 \\ -3y + 2z = -4 \\ -10y + 2z = -18 \end{cases} \quad E_3 - E_2 \Rightarrow \begin{cases} x + 3y - 2z = 6 \\ -3y + 2z = -4 \\ -7y = -14 \end{cases} \Rightarrow y = 2, z = 1, x = 2$$

Sistema compatible determinado. Solución única: $(x = 2, y = 2, z = 1)$

$$b) \begin{cases} x + 2y - 3z = 3 \\ 3x - 2y + z = 7 \\ 5x + 2y - 5z = 1 \end{cases} \begin{matrix} E_2 - 3E_1 \\ E_3 - 5E_1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y - 3z = 3 \\ -8y + 10z = -2 \\ -8y + 10z = -14 \end{cases} \quad E_3 - E_2 \Rightarrow \begin{cases} x + 2y - 3z = 3 \\ -8y + 10z = -2 \\ 0 = -12 \end{cases}$$

Sistema incompatible. No hay solución.

$$c) \begin{cases} 2x + y - 2z = 8 \\ 2x - 4y + 3z = -2 \\ 4x - y + 6z = -4 \end{cases} \begin{matrix} E_2 - E_1 \\ E_3 - 2E_1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y - 2z = 8 \\ -5y + 5z = -10 \\ -3y + 10z = -20 \end{matrix} \quad \frac{E_2}{-5} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y - 2z = 8 \\ y - z = 2 \\ -3y + 10z = -20 \end{cases} \quad E_3 + 3E_2 \Rightarrow \begin{cases} 2x + y - 2z = 8 \\ y - z = 2 \\ 7z = -14 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z = -2, y = 0, x = 2$$

Sistema compatible determinado. Solución: $(x = 2, y = 0, z = -2)$

$$d) \begin{cases} x + 3y - 2z = -6 \\ 2x - 3y + 5z = 6 \\ 5x - 3y + 8z = 6 \end{cases} \begin{matrix} E_2 - 2E_1 \\ E_3 - 5E_1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} x + 3y - 2z = -6 \\ -9y + 9z = 18 \\ -18y + 18z = 36 \end{cases} \quad E_3 - 2E_2 \Rightarrow \begin{cases} x + 3y - 2z = -6 \\ -9y + 9z = 18 \\ -y + z = 2 \end{cases} \Rightarrow z = t, y = t - 2, x = -t$$

Sistema compatible indeterminado. Infinitas soluciones: $(x = -t, y = t - 2, z = t)$

2.52. Estudia la compatibilidad de estos sistemas y halla, en su caso, sus soluciones.

$$a) \begin{cases} x + 2y - 2z = 4 \\ 2x + 5y - 2z = 10 \\ 4x + 9y - 6z = 18 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} 2x + y + z = 0 \\ 3x + 2y - 2z = 15 \\ x + y - z = 7 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x + 2y - z = -5 \\ 5x - y + 2z = 11 \\ 6x + y + z = 5 \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} x + 3y - 2z = 4 \\ 2x + 2y + z = 3 \\ 3x + 2y + z = 5 \end{cases}$$

$$a) \begin{cases} x + 2y - 2z = 4 \\ 2x + 5y - 2z = 10 \\ 4x + 9y - 6z = 18 \end{cases} \begin{matrix} E_2 - 2E_1 \\ E_3 - 4E_1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y - 2z = 4 \\ y + 2z = 2 \\ y + 2z = 2 \end{cases} \quad E_3 - E_2 \Rightarrow \begin{cases} x + 2y - 2z = 4 \\ y + 2z = 2 \\ y = 2 - 2z \end{cases} \Rightarrow z = t, y = 2 - 2t, x = 6t$$

Sistema compatible indeterminado. Infinitas soluciones: $(x = 6t, y = 2 - 2t, z = t)$

$$b) \begin{cases} x + 2y - z = -5 \\ 5x - y + 2z = 11 \\ 6x + y + z = 5 \end{cases} \begin{matrix} E_2 - 5E_1 \\ E_3 - 6E_1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y - z = -5 \\ -11y + 7z = 36 \\ -11y + 7z = 35 \end{cases} \quad E_3 - E_2 \Rightarrow \begin{cases} x + 2y - z = -5 \\ -11y + 7z = 36 \\ 0 = -1 \end{cases}$$

Sistema incompatible. No hay solución.

$$c) \begin{cases} 2x + y + z = 0 \\ 3x + 2y - 2z = 15 \\ x + y - z = 7 \end{cases} \begin{matrix} 2E_2 - 3E_1 \\ 2E_3 - E_1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y + z = 0 \\ y - 7z = 30 \\ y - 3z = 14 \end{cases} \quad E_3 - E_2 \Rightarrow \begin{cases} 2x + y + z = 0 \\ y - 7z = 30 \\ 4z = -16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = -4 \end{cases}$$

Sistema compatible determinado. Solución única.

$$d) \begin{cases} x + 3y - 2z = 4 \\ 2x + 2y + z = 3 \\ 3x + 2y + z = 5 \end{cases} \quad E_3 - E_2 \Rightarrow \begin{cases} x + 3y - 2z = 4 \\ 2x + 2y + z = 3 \\ x = 2 \end{cases} \quad E_3 - E_2 \Rightarrow \begin{cases} 3y - 2z = 2 \\ 2y + z = -1 \\ x = 2 \end{cases} \quad E_1 + 2E_2 \Rightarrow \begin{cases} 3y - 2z = 2 \\ 7y = 0 \\ x = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = -1 \\ y = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

Sistema compatible determinado. Solución única.

2.53. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones de segundo grado.

$$\text{a) } \begin{cases} x - 6y = -6 \\ 2x^2 + y^2 = 76 \end{cases} \quad \text{c) } \begin{cases} 3x + \frac{y}{2} = 15 \\ \frac{2}{x} + \frac{3}{y} = 1 \end{cases} \quad \text{e) } \begin{cases} 3x^2 + 5y^2 = 20 \\ 4x^2 - y^2 = -4 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} 3xy - 2x^2 = -26 \\ 4x + 5y = -7 \end{cases} \quad \text{d) } \begin{cases} 2x + 4y = 10 \\ x^2 + 3xy = -8 \end{cases} \quad \text{f) } \begin{cases} x^2 - 2(x - y)^2 = 36 \\ \frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 5 \end{cases}$$

$$\text{a) } \begin{cases} x - 6y = -6 \\ 2x^2 + y^2 = 76 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 6y - 6 \\ 2(6y - 6)^2 + y^2 = 76 \end{cases} \Rightarrow 73y^2 - 144y - 4 = 0 \Rightarrow y = \frac{144 \pm 148}{146} \Rightarrow \begin{cases} x = 6, y = 2 \\ x = -\frac{450}{73}, y = -\frac{2}{73} \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} 3xy - 2x^2 = -26 \\ 4x + 5y = -7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3x \cdot \frac{7+4x}{5} - 2x^2 = -26 \\ y = -\frac{7+4x}{5} \end{cases} \Rightarrow -22x^2 - 21x + 130 = 0 \Rightarrow x = \frac{21 \pm 109}{-44} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{65}{22}, y = \frac{53}{55} \\ x = 2, y = -3 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} 3x + \frac{y}{2} = 15 \\ \frac{2}{x} + \frac{3}{y} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x + y = 30 \\ 2y + 3x = xy \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 30 - 6x \\ 60 - 12x + 3x = 30x - 6x^2 \end{cases} \Rightarrow 2x^2 - 13x + 20 = 0 \Rightarrow x = \frac{13 \pm 3}{4} \Rightarrow \begin{cases} x = 4, y = 6 \\ x = \frac{5}{2}, y = 15 \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} 2x + 4y = 10 \\ x^2 + 3xy = -8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{5-x}{2} \\ x^2 + 3xy = -8 \end{cases} \Rightarrow x^2 + 3x\left(\frac{5-x}{2}\right) = -8 \Rightarrow x^2 - 15x + 16 = 0 \Rightarrow x = \frac{15 \pm 17}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 16, y = -\frac{11}{2} \\ x = -1, y = 3 \end{cases}$$

$$\text{e) } \begin{cases} 3x^2 + 5y^2 = 20 \\ 4x^2 - y^2 = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x^2 + 5y^2 = 20 \\ 20x^2 - 5y^2 = -20 \end{cases} \Rightarrow 23x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0, y = 2 \\ x = 0, y = -2 \end{cases}$$

$$\text{f) } \begin{cases} x^2 - 2(x - y)^2 = 36 \\ \frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 2x^2 - 2y^2 + 4xy = 36 \\ 3x + 2y = 30 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x^2 - 2y^2 + 4xy = 36 \\ y = 15 - \frac{3}{2}x \end{cases} \Rightarrow \\ \Rightarrow -x^2 - 2\left(15 - \frac{3}{2}x\right)^2 + 4x\left(15 - \frac{3}{2}x\right) = 36 \Rightarrow -x^2 - 450 - \frac{9}{2}x^2 + 90x + 60x - 6x^2 = 36 \Rightarrow \\ \Rightarrow -\frac{23}{2}x^2 + 150x - 486 = 0 \Rightarrow 23x^2 - 300x + 972 = 0 \Rightarrow x = \frac{300 \pm 24}{46} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{162}{23}, y = \frac{102}{23} \\ x = 6, y = 6 \end{cases}$$

2.56. Resuelve las siguientes inecuaciones de primer grado.

$$\text{a) } 3x + 3(2x - 5) - 4(x - 2) \leq 2 - x \quad \text{c) } \frac{x+1}{3} - \frac{x+2}{4} + \frac{x-3}{18} \geq -\frac{8}{9}$$

$$\text{b) } \frac{x}{2} - \frac{x-1}{6} > 1 - \frac{2x-5}{2} \quad \text{d) } \frac{2x-3}{4} - \frac{x}{2} \leq 2(x-1) - \frac{35}{4}$$

$$\text{a) } 3x + 3(2x - 5) - 4(x - 2) \leq 2 - x \Rightarrow 3x + 6x - 15 - 4x + 8 \leq 2 - x \Rightarrow 6x \leq 9 \Rightarrow x \leq \frac{3}{2} \Rightarrow \\ \Rightarrow \text{Solución } \left(-\infty \quad \frac{3}{2}\right]$$

$$\text{b) } \frac{x}{2} - \frac{x-1}{6} > 1 - \frac{2x-5}{2} \Rightarrow 3x - x + 1 > 6 - 6x + 15 \Rightarrow 8x > 20 \Rightarrow x > \frac{5}{2} \Rightarrow \text{Solución } \left(\frac{5}{2} \quad +\infty\right)$$

$$\text{c) } \frac{x+1}{3} - \frac{x+2}{4} + \frac{x-3}{18} \geq -\frac{8}{9} \Rightarrow 12x + 12 - 9x - 18 + 2x - 6 \geq -32 \Rightarrow 5x \geq -20 \Rightarrow x \geq -4 \Rightarrow \\ \Rightarrow \text{Solución } [-4 \quad +\infty)$$

$$\text{d) } \frac{2x-3}{4} - \frac{x}{2} \leq 2(x-1) - \frac{35}{4} \Rightarrow 2x - 3 - 2x \leq 8x - 8 - 35 \Rightarrow 40 \leq 8x \Rightarrow x \geq 5 \Rightarrow \text{Solución } [5 \quad +\infty)$$

2.57. Calcula las soluciones de las inecuaciones polinómicas siguientes.

a) $x^2 + x - 12 \geq 0$

b) $-2x^2 + 3x > 0$

c) $4x^2 - 1 \leq 0$

d) $6x^2 + x - 1 < 0$

e) $x^3 - 4x \leq 0$

f) $x^3 - 3x - 2 < 0$

g) $x^4 - 1 \geq 0$

h) $x^3 - 7x + 6 \leq 0$

a) $x^2 + x - 12 \geq 0 \Rightarrow (x + 4)(x - 3) \geq 0$

	$-\infty$	-4	3	$+\infty$
$x + 4$		-	+	+
$x - 3$		-	-	+
polinomio		+	-	+

Solución: $x \in (-\infty, -4] \cup [3, +\infty)$

b) $-2x^2 + 3x > 0 \Rightarrow x(-2x + 3) > 0$

	$-\infty$	0	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
x		-	+	+
$-2x + 3$		+	+	-
polinomio		-	+	-

Solución: $x \in \left(0, \frac{3}{2}\right)$

c) $4x^2 - 1 \leq 0 \Rightarrow (2x - 1)(2x + 1) \leq 0$

	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$2x + 1$		-	+	+
$2x - 1$		-	-	+
polinomio		+	-	+

Solución: $x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$

d) $6x^2 + x - 1 < 0 \Rightarrow (3x - 1)(2x + 1) < 0$

	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$+\infty$
$2x + 1$		-	+	+
$3x - 1$		-	-	+
polinomio		+	-	+

Solución: $x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$

e) $x^3 - 4x \leq 0 \Rightarrow x(x + 2)(x - 2) \leq 0$

	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$
$x + 2$		-	+	+	+
x		-	-	+	+
$x - 2$		-	-	-	+
polinomio		-	+	-	+

Solución: $x \in (-\infty, -2] \cup [0, 2]$

f) $x^3 - 3x - 2 < 0 \Rightarrow (x - 2)(x + 1)^2 < 0 \Rightarrow x < 2$,
ya que el factor $(x + 1)^2$ es positivo excepto para $x = -1$.

Por tanto, la solución es $x \in (-\infty, 2) - \{-1\}$

g) $x^4 - 1 \geq 0 \Rightarrow (x + 1)(x - 1)(x^2 + 1) \geq 0 \Rightarrow$
 $\Rightarrow (x + 1)(x - 1) \geq 0$, al ser $x^2 + 1$ siempre positivo.

	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$x + 1$		-	+	+
$x - 1$		-	-	+
polinomio		+	-	+

Solución: $x \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$

h) $x^3 - 7x + 6 \leq 0 \Rightarrow (x - 1)(x - 2)(x + 3) \leq 0$

	$-\infty$	-3	1	2	$+\infty$
$x + 3$		-	+	+	+
$x - 1$		-	-	+	+
$x - 2$		-	-	-	+
polinomio		-	+	-	+

Solución: $x \in (-\infty, -3] \cup [1, 2]$

2.58. Resuelve las siguientes inecuaciones racionales.

a) $\frac{5x - 2}{2x + 1} \leq 0$

c) $\frac{x^2 - 1}{x + 2} \leq 0$

e) $\frac{x^3 + x^2 - 5x + 3}{x^3 + 5x^2 + 3x - 9} < 0$

b) $\frac{3x - 1}{5 - 10x} > 0$

d) $\frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 5x + 6} > 0$

a) $\frac{5x - 2}{2x + 1} \leq 0$

	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{2}{5}$	$+\infty$
$5x - 2$		-	-	+
$2x + 1$		-	+	+
fracción		+	-	+

Solución: $x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{2}{5}\right]$

b) $\frac{3x - 1}{5 - 10x} > 0$

	$-\infty$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$5 - 10x$		+	+	-
$3x - 1$		-	+	+
fracción		-	+	-

Solución: $x \in \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$

c) $\frac{x^2 - 1}{x + 2} \leq 0 \Rightarrow \frac{(x - 1)(x + 1)}{x + 2} \leq 0$

	$-\infty$	-2	-1	1	$+\infty$
$x + 2$		-	+	+	+
$x + 1$		-	-	+	+
$x - 1$		-	-	-	+
polinomio		-	+	-	+

Solución: $x \in (-\infty, -2) \cup [-1, 1]$

d) $\frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 5x + 6} > 0 \Rightarrow \frac{(x - 1)(x - 4)}{(x - 2)(x - 3)} > 0$

	$-\infty$	1	2	3	4	$+\infty$
$x - 1$		-	+	+	+	+
$x - 3$		-	-	+	+	+
$x - 4$		-	-	-	+	+
fracción		+	-	+	-	+

Solución: $x \in (-\infty, 1) \cup (2, 3) \cup (4, +\infty)$

e) $\frac{x^3 + x^2 - 5x + 3}{x^3 + 5x^2 + 3x - 9} < 0 \Rightarrow \frac{(x + 3)(x - 1)^2}{(x + 3)^2(x - 1)} < 0 \Rightarrow$

\Rightarrow si $x \neq -3$ y $x \neq 1$, $\frac{x - 1}{x + 3} < 0$

	$-\infty$	-3	1	$+\infty$
$x + 3$		-	+	-
$x - 1$		-	-	+
fracción		+	-	+

Solución: $x \in (-3, 1)$